

Bulletin of the Australian Mathematical Society

<http://journals.cambridge.org/BAZ>

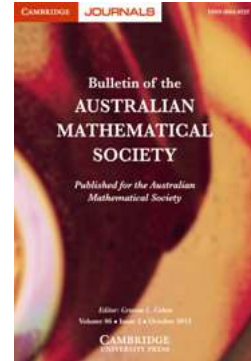
Additional services for *Bulletin of the Australian Mathematical Society*:

Email alerts: [Click here](#)

Subscriptions: [Click here](#)

Commercial reprints: [Click here](#)

Terms of use : [Click here](#)



G-Fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières II

Cristiana Bertolin

Bulletin of the Australian Mathematical Society / Volume 58 / Issue 02 / October 1998, pp 189 - 198
DOI: 10.1017/S0004972700032160, Published online: 17 April 2009

Link to this article: http://journals.cambridge.org/abstract_S0004972700032160

How to cite this article:

Cristiana Bertolin (1998). G-Fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières II. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 58, pp 189-198 doi:10.1017/S0004972700032160

Request Permissions : [Click here](#)

G-FONCTIONS ET COHOMOLOGIE DES HYPERSURFACES SINGULIÈRES II

CRISTIANA BERTOLIN

Following Dwork's indications, in this work we give a further elaboration and a list of corrections for the article "G-fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières". Moreover we extend the contents of that work to quasi-homogeneous polynomials.

INTRODUCTION

Soit f un polynôme homogène en les variables x_1, \dots, x_{n+1} et à coefficients dans un corps de nombres, K . Dans [3] Dwork définit les modules exponentielles $\mathcal{K}^{(l)}$ associés à f et il démontre que si K est un corps de nombres alors pour presque tous les premiers p de K , l'action du Frobenius sur $\mathcal{K}^{(l)}$ est liée à la fonction Zêta de l'hypersurface définie par la réduction mod p de f . Cette théorie est intéressante dans le cas où $f = 0$ a des singularités.

Dans [1] on étudie $\mathcal{K}^{(l)}$ en tant que module différentiel dans le cas où K est le corps des fonctions rationnelles en une seule variable sur un corps de nombres. On démontre que $\mathcal{K}^{(l)}$ est un module de type G et on explicite une majoration effective de son rayon globale, $\rho(\mathcal{K}^{(l)})$, qui ne dépend pas de " l ", mais seulement du polynôme f (voir [1, Théorème 4.2, Remarque 4.3]).

Suivant les indications de Dwork, dans ce travail on va apporter des approfondissements et des corrections à l'article [1]. Plus précisément, dans la première section on explique le contenu de [1]. Dans la deuxième on démontre en utilisant les résultats de [1], que même dans le cas où f est un polynôme quasi homogène le module différentiel $\mathcal{K}^{(l)}$, qui lui est associé, est un module de type G . Enfin dans la troisième section on donne une liste de corrections de [1].

L'auteur est reconnaissante à Dwork pour les idées, l'aide et les conseils qu'il n'a jamais cessé de lui fournir.

0. TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

On utilise les notations de [1] (voir en particulier [1, Section 0]).

Received 15th December, 1997

Copyright Clearance Centre, Inc. Serial-fee code: 0004-9729/98 \$A2.00+0.00.

1. EXPLICATION DE L'ARTICLE [1]

1.1. D'après [3] le complexe de Koszul des opérateurs $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$ agissant sur R^* , fournit des espaces de cohomologie de dimension finie. Cependant il se peut très bien que l'action du Frobenius ne soit pas définie sur ces espaces.

Puisqu'il existe une application naturelle $\mathcal{K}^{(l)} \hookrightarrow \mathcal{K}^{(l+1)}$, on peut définir $\mathcal{K}^{(\infty)}$ comme étant l'espace limite. On a

$$\mathcal{K}^{(\infty)} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{K}^{(l+1)} \supseteq \mathcal{K}^{(l)} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{K}^{(1)}.$$

Si les coefficients de f sont indépendants de λ , c'est-à-dire s'ils appartiennent à K , alors $\mathcal{K}^{(\infty)}$ est contenu dans $L^*(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et pour presque toutes les valuations de K . Le complexe de Koszul des opérateurs $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$ agissant cette fois sur $\mathcal{K}^{(\infty)}$, fournit encore des espaces de cohomologie de dimension finie et pour presque tout premier p de K , la fonction Zêta de la variété torique définie par la réduction mod p de $f(x) = 0, x_1, \dots, x_{n+1} \neq 0$, est calculée dans [3, Théorème 20.2], grâce à l'action du Frobenius sur ces espaces de cohomologie.

1.2. Dans [1] les coefficients du polynôme f appartiennent à $K(\lambda)$, c'est-à-dire ils dépendent de λ . Il semble raisonnable de croire que le complexe de Koszul des opérateurs $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$ construits avec ce nouveau f et agissants sur $\mathcal{K}^{(\infty)}$, fournisse encore des espaces de cohomologie de dimension finie. Dans [1, Théorème 4.2, Remarque 4.3] on calcule une majoration explicite de $\rho(\mathcal{K}^{(l)})$, qui est indépendante de " l ". Mais alors non seulement le module différentiel $\mathcal{K}^{(l)}$ a un rayon global fini pour chaque $l \geq 1$, mais aussi $\mathcal{K}^{(\infty)}$, qui est un module "différentiel" sur $K(\lambda)$ de dimension infinie, a un rayon globale fini, c'est-à-dire $\rho(\mathcal{K}^{(\infty)}) < +\infty$.

On est donc amené à croire que le module de dimension infinie, $\mathcal{K}^{(\infty)}$, se comporte comme un module de dimension finie $\mathcal{K}^{(l)}$ pour l assez grand. En particulier le complexe de Koszul des opérateurs $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$ agissants sur $\mathcal{K}^{(\infty)}$, pourrait être déterminé par celui des opérateurs $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$ agissants sur $\mathcal{K}^{(l)}$ pour l assez grand. Ainsi on pourrait avoir des informations sur la fonction Zêta de la variété définie par la réduction mod p de $f(x) = 0, x_1, \dots, x_{n+1} \neq 0$, à partir d'un espace de dimension finie.

2. THÉORIE DES FORMES QUASI HOMOGÈNES

2.1. Soit $\tilde{R} = K(\lambda)[X_1, \dots, X_{n+1}]$. Rappelons qu'un polynôme $g(X) \in \tilde{R}$ est un *polynôme quasi homogène* sur $K(\lambda)$ s'il existe un $(n+1)$ -uplet $(d_1, \dots, d_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $g(X_1^{d_1}, \dots, X_{n+1}^{d_{n+1}})$ soit un polynôme homogène.

THÉORÈME 2.2. *Soit $g(X)$ un polynôme quasi homogène sur $K(\lambda)$. Alors pour chaque $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, le module*

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \widetilde{R} / \sum_{|v|=l} D_g^v \widetilde{R}$$

muni de la connection $\sigma_{\lambda,g} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda}$, est un module de type G .

PREUVE: Par définition de $g(X)$, il existe $(d_1, \dots, d_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $g(X_1^{d_1}, \dots, X_{n+1}^{d_{n+1}})$ soit un polynôme homogène de degré noté d .

Soient $f(X) = g(X_1^{d_1}, \dots, X_{n+1}^{d_{n+1}})$ et $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)} = \widetilde{R} / \sum_{|v|=l} D_f^v \widetilde{R}$. Puisque $f(X) \in R_1$, on

peut utiliser les arguments de [1] pour démontrer que pour chaque $l \geq 1$, $\mathcal{W}_f^{(l)}$ muni de la connection $\sigma_{\lambda,f} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}$, est un module de type G .

Maintenant pour chaque $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $0 \leq \alpha_i < d_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$, soit $\widetilde{R}(\vec{\alpha})$ l'espace sur $K(\lambda)$ engendré par X^u , où $u \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $u_i \equiv \alpha_i \pmod{d_i}$ pour $i = 1, \dots, n+1$.

Puisque $\widetilde{R}(\vec{\alpha})$ est stable sous $\sigma_{\lambda,f}$ et $D_{i,f}$ pour $i = 1, \dots, n+1$, on peut définir

$$\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha}) = \widetilde{R}(\vec{\alpha}) / \sum_{|v|=l} D_f^v \widetilde{R}(\vec{\alpha}).$$

On observe que $\widetilde{R} = \bigoplus_{\vec{\alpha}} \widetilde{R}(\vec{\alpha})$ et donc

$$\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)} = \bigoplus_{\vec{\alpha}} \widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha}).$$

Mais alors, puisque pour chaque $l \geq 1$, $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}$ est un module de type G , on trouve que pour chaque $\vec{\alpha}$ et chaque $l \geq 1$, $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha})$ est un module de type G .

Considérons maintenant l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \theta : \widetilde{R} &\longrightarrow \widetilde{R}^{(0)} \\ X^u &\longmapsto X_1^{u_1 d_1} \dots X_{n+1}^{u_{n+1} d_{n+1}}. \end{aligned}$$

Il est évident que $\theta g = f$ et que $\theta \circ \sigma_g = \sigma_f \circ \theta$. Puisque $(1/d_i)E_i \circ \theta = \theta \circ E_i$ on a aussi que $d_i \theta \circ D_{i,g} = D_{i,f} \circ \theta$ pour $i = 1, \dots, n+1$. Donc cet isomorphisme passe au quotient et on obtient que $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$ est isomorphe au module de type G $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(0)$. Par conséquent on peut conclure que $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$ est un module de type G pour chaque $l \geq 1$. \square

COROLLAIRE 2.3. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$. De plus soit

$$g(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n_2} X_{n_1+1+j} h^{(j)}(X_1, \dots, X_{n_1+1})$$

où pour $j = 1, \dots, n_2$, $h^{(j)}(X_1, \dots, X_{n_1+1})$ est un polynôme homogène sur $K(\lambda)$ de degré μ_j en les $n_1 + 1$ variables X_1, \dots, X_{n_1+1} .

Alors pour chaque $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, le module

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \widetilde{R} / \sum_{|v|=l} D_g^v \widetilde{R}$$

muni de la connection $\sigma_{\lambda,g} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda}$, est un module de type G .

PREUVE: Conséquence immédiate du Théorème 2.2 car $g(X)$ est un polynôme quasi homogène. En effet il suffit de considérer le $(n+1)$ -uplet $(1, \dots, 1, d - \mu_1, \dots, d - \mu_{n_2})$, où $d = \max_{1 \leq j \leq n_2} \mu_j$, pour le rendre homogène. \square

2.4. Soit $g(X)$ un polynôme comme dans 2.3 et posons $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{n_2}) \in \mathbb{N}^{n_2}$. Pour chaque $\beta \in \mathbb{N}$, soit $\widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$ l'espace sur $K(\lambda)$ engendré par X^u , où $u \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $\sum_{i=1}^{n_1+1} u_i = \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j u_{n_1+1+j} + \beta$.

Puisque $\widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$ est stable sous $\sigma_{\lambda,g}$ et $D_{i,g}$ pour $i = 1, \dots, n+1$, on peut définir

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) = \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta) / \sum_{|v|=l} D_g^v \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta).$$

COROLLAIRE 2.5. Soit β tel que $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta)$ soit non nul. Alors pour chaque $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, le module $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta)$ muni de la connection $\sigma_{\lambda,g} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda}$, est un module de type G . En particulier $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, 0)$ est un module de type G .

PREUVE: On observe que $\widetilde{R} = \bigoplus_{\beta} \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$ et donc

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \bigoplus_{\beta} \widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta).$$

On a alors $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) = 0$ pour presque tout β et lorsque $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) \neq 0$ c'est un module de type G , puisque d'après 2.3 $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$ l'est. \square

2.6. Remarque: une version un peu modifiée de $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(1)}(\vec{\mu}, 0)$ est le sujet du livre [4].

3. ERRATA CORRIGE DE L'ARTICLE [1]

p.358, (2.2.2): $g(X) = (X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2) + \cdots + (X_{n-1}^2 + X_{n-1}X_n + X_n^2) + X_{n+1}^2$.

p.359, (1.4.3): $\bar{N} = \binom{n+1}{n+1}N$ (il y a une erreur dans [3, Section 4]).

p.359, 1.17: $\left\{ \sum_{u \in \mathcal{F}'} B_u(1/X^u) \mid B_u \in \Omega_0 \right\}$ où $\mathcal{F}' \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{u \in \mathbb{N}^{n+1} \mid u_1 + \cdots + u_{n+1} \equiv 0 \pmod{d}\}$.

p.360, 1.4: ... on doit substituer à l'ensemble $\mathcal{F}' \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{u \in \mathbb{N}^{n+1} \mid u_1 + \cdots + u_{n+1} \equiv 0 \pmod{d}\}$, l'ensemble: ...

p.362, 1.7: $D_{A,i,\infty}^* : L^*(b) \longrightarrow L^*(b)$.

p.362, 1.27: $1/(p-1) < b \leq p/(p-1)$.

p.363, 1.3: Dans notre contexte on ne peut pas utiliser [2, Lemme 3.10] car il utilise la compacité. Nous allons donc donner une autre démonstration de ce lemme.

LEMME 3.1. Soient $c, b, e \in \mathbb{R}$ tels que $1/(p-1) < b \leq p/(p-1)$ et $e = b - 1/(p-1)$. Indiquons par S soit un sous ensemble propre de $\{1, \dots, n+1\}$ soit $\{0, \dots, n\}$. De plus soient $\{\xi_i\}_{i \in S}$ des éléments de $L(b, c)$ tels que $\sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i = 0$.

Alors il existe des éléments $\{\eta_{i,j}\}_{i,j \in S}$ de $L(b, c+e)$, avec $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$ et $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$, tels que

$$\xi_i = \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty} \eta_{i,j} \quad \forall i \in S.$$

PREUVE: Pour chaque $r \geq 0$, on va construire par récurrence une famille $\{\xi_i^{(r)}\}_{i \in S}$ d'éléments de $L(b, c+re)$ tels que $\sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i^{(r)} = 0$. Pour $r = 0$ posons $\xi_i^{(0)} = \xi_i \quad \forall i \in S$. Supposons maintenant que la famille $\{\xi_i^{(r)}\}_{i \in S}$ existe. Puisque $\sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i^{(r)} = 0$ on a $\sum_{i \in S} F_i \xi_i^{(r)} = - \sum_{i \in S} E_i \xi_i^{(r)} \in L(b, c+re)$. Grâce à [2, Lemme 3.8], on sait alors qu'il existe des éléments $\{\eta_i^{(r)}\}_{i \in S}$ de $L(b, c+(r+1)e)$ et des éléments $\{\eta_{i,j}^{(r)}\}_{i,j \in S}$ de $L(b, c+(r+1)e)$, avec $\eta_{i,j}^{(r)} = -\eta_{j,i}^{(r)}$ et $\eta_{i,i}^{(r)} = 0 \quad \forall i, j \in S$, tels que

$$\xi_i^{(r)} = \eta_i^{(r)} + \sum_{j \in S} F_j \eta_{i,j}^{(r)} \quad \forall i \in S.$$

Définissons

$$(3.1.1) \quad \xi_i^{(r+1)} = \xi_i^{(r)} - \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty} \eta_{i,j}^{(r)} \quad \forall i \in S.$$

On observe que $\xi_i^{(r+1)} = \eta_i^{(r)} - \sum_{j \in S} E_j \eta_{i,j}^{(r)} \in L(b, c+(r+1)e)$ et que $\sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i^{(r+1)} = \sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i^{(r)} = 0$. On a donc vérifié que la famille $\{\xi_i^{(r+1)}\}_{i \in S}$ a bien toutes les

propriétés requises. En écrivant (3.1.1) pour $r = 1, \dots, m$ et en additionnant toutes les égalités obtenues, on trouve que

$$\xi_i^{(m+1)} = \xi_i^{(0)} - \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty} \left(\sum_{r=0}^m \eta_{i,j}^{(r)} \right) \quad \forall i \in S.$$

Maintenant si on fait tendre m à l'infini, $\xi_i^{(m+1)}$ tend vers 0 et $\sum_{r=0}^m \eta_{i,j}^{(r)}$ converge dans $L(b, c + e)$ vers un élément qu'on notera $\eta_{i,j}$ et qui est tel que $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$ et $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$. Par conséquent on obtient finalement

$$\xi_i = \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty} \eta_{i,j} \quad \forall i \in S$$

avec $\{\eta_{i,j}\}_{i,j \in S}$ éléments de $L(b, c + e)$ tels que $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$ et $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$. \square

p.364, 1.8-10: ... $E(b)$ est fermé dans $L_c(b)$ et donc $L_c(b)/E(b)$ est un espace vectoriel normé sur un corps complet. D'après [1, (1.7.8)] il est de dimension finie et par conséquent tout χ appartenant à $\text{Hom}(L_c(b)/E(b), \Omega)$ est continu. Mais alors, puisque par définition de la topologie de $L_c(b)/E(b)$ l'application $\pi_{c,b}$ est continue, on peut conclure que pour chaque élément χ appartenant à $\text{Hom}(L_c(b)/E(b), \Omega)$, $\chi \circ \pi_{c,b}$ est une fonction linéaire et continue sur $L_c(b)$.

p.366, 1.13: $\{w_{u,i,A}^* = \sum_{w \in \mathcal{F}_0} (1/\chi(A)) (G_{w,u,i}(A)/(R(A)\pi)^{w_0}) 1/X^w\}_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq |u| \leq l-1}}$

p.367, (2.3.2): $\mathcal{K}_{t_v}^{(l)} \subset L^*(\text{ord } R(t_v) + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$.

Ceci signifie que si $w_{i,t_v}^* = \sum_{u \in \mathcal{F}_0} B_u(1/X^u)$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel

que $\text{ord}(B_u) \geq -u_0(\varepsilon + \text{ord } R(t_v)) - c_\varepsilon$.

p.368, 1.9: $\text{ord}(H_w B_{w+u}) \geq -c_\varepsilon + w_0(-\varepsilon + \text{ord}(\lambda - t_v) - \text{ord } R(t_v)) - u_0(\varepsilon + \text{ord } R(t_v))$.

p.370, 1.26: $\lim_{v \rightarrow \infty} B_v(\lambda, \Gamma) = 0$ Γ -adiquement car $B_v(\lambda, \Gamma) \in \Gamma^{v_0} K(\lambda)[[\Gamma]]$.

p.371, 1.2: $\sigma_\Gamma^* = \gamma_- \circ \left(\frac{\partial}{\partial \Gamma} - \frac{\partial g}{\partial \Gamma} \right)$.

p.372, 1.9-11: Munissons $K(\lambda)$ de la norme de Gauss par rapport à λ et soit Ω la clôture algébrique de $K(\lambda)$, munie d'une extension de la norme de $K(\lambda)$.

p.372, 1.14: $|\Gamma| \leq |\rho_0(\lambda, A^{(0)})|^{1+N^2} |\sigma_0(\lambda, A^{(0)})|$ où $\sigma_0(\lambda, A^{(0)})$ est le coefficient de Γ^τ dans $\chi(\lambda, \Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\lambda, \Gamma, A^{(0)}) = \Gamma^\tau (\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) + \Gamma \sigma_1(\lambda, A^{(0)}) + \dots)$, avec $\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) \neq 0$. (On change légèrement la spécialisation de A faite en [1, 3.1] en ajoutant la condition $\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) \neq 0$.) En effet dans la démonstration de [1, 3.9] on a choisit α tel que $|\alpha| \leq 1$ et tel que $R(\lambda, \Gamma)$ n'ait pas de zéros dans le disque pointé $0 < |\Gamma| < |\alpha|$. Ceci signifie que le système $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$ peut avoir seulement

des singularités triviales dans cette région. Cependant dans la quatrième partie de la démonstration de [1, A3] on a besoin qu'il n'y ait pas de singularités triviales dans ce disque pointé.

Pour résoudre ce problème, on choisit α tel que $\chi(\lambda, \Gamma)R(\lambda, \Gamma)$ n'ait pas de zéros dans le disque pointé $0 < |\Gamma| < |\alpha|$. Avec cette nouvelle condition, l'assertion [1, (3.9.2)] reste vraie, mais il faut changer la conclusion de l'énoncé de [1, 3.9].

p.372, (3.9.1):

$$|h_{i,w,s}| \leq \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^s |\rho_0(\lambda, A^{(0)})|^{s(1+N^2)} |\sigma_0(\lambda, A^{(0)})|^s}.$$

p.372, l.18 - p.373, l.3: La discussion sur les singularités du système $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$ est un peu confuse. D'après [1, 1.8], les coefficients de $G(\lambda, \Gamma)$ appartiennent à $K(\lambda) \left[\Gamma, 1/(\chi(\lambda, \Gamma)R(\lambda, \Gamma)) \right]$ et donc les singularités de $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$ sont contenues dans l'ensemble des Γ_0 tels que le produit $\chi(\lambda, \Gamma_0)R(\lambda, \Gamma_0)$ soit nul. Soit Γ_0 tel que $\chi(\lambda, \Gamma_0) = 0$ et $R(\lambda, \Gamma_0) \neq 0$. Alors Γ_0 doit être une singularité apparente, car si on choisit une nouvelle base de $\mathcal{W}^{(l)}$, on obtient un nouveau $\chi(\lambda, \Gamma)$ qui ne s'annule pas en Γ_0 . Mais d'après [3, Lemme 9.1] on sait en plus que si $R(\lambda, \Gamma_0) \neq 0$, alors Γ_0 est une singularité triviale de $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$. Par conséquent on peut conclure que les singularités non triviales du système $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$ sont contenues dans l'ensemble des Γ_0 tels que $R(\lambda, \Gamma_0) = 0$.

p.374, l.12: $\mathcal{K}_{\lambda,0}^{(l)} \subset L^*((1 + e(1 + N^2)) \text{ ord } \rho_0(\lambda, A^{(0)}) + e \text{ ord } \sigma_0(\lambda, A^{(0)}) + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$.

p.375, (3.13.1):

$$\rho(\mathcal{G}(\lambda)) \leq (1 + e(N^2 + 1)) \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log \frac{1}{|\rho_0(\lambda, A^{(0)})|_v} + e \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log \frac{1}{|\sigma_0(\lambda, A^{(0)})|_v}.$$

LEMME 3.2.

$$(3.2.1) \quad e \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log \frac{1}{|\sigma_0(\xi, A^{(0)})|_v} \leq \left(\sum_{s=1}^n \binom{n+sd}{n} \right) \cdot \left(\binom{n+(n+1)d}{n} \left[\frac{1}{2} \log \left(\binom{n+d}{d-2} \frac{4(n+2d)}{d-1} \right) + \log(m+1) + h_\infty(f) \right] \right).$$

PREUVE: Dans [1, 4.1] on spécialise λ et Γ et on modifie la spécialisation $A^{(0)}$ de A , faite en [1, 3.1]. Pour majorer le terme $e \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log 1/|\sigma_0(\xi, A^{(0)})|_v$, on va ajouter trois conditions à ces spécialisations:

$$(1) \quad \sigma_0(\lambda, A^{(0)}) \neq 0,$$

$$(2) \quad \sigma_0(\xi, A^{(0)}) \neq 0,$$

$$(3) \quad \sigma(\xi, \mu) \neq 0.$$

D'après [4, Section 3] $\chi(\xi, \mu) = \prod_{s=1}^n b_s(\xi, \mu, A^{(0)})$ avec $b_s(\xi, \mu, A^{(0)}) = \mu^{\tau_s} \left(\sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) + \mu \sigma_1^{(s)}(\xi, A^{(0)}) + \dots \right)$ où $\sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) \neq 0$ pour $s = 1, \dots, n$. On a donc

$$(3.2.2) \quad \sigma_0(\xi, A^{(0)}) = \prod_{s=1}^n \sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)})$$

et par conséquent il nous suffit de trouver une bonne majoration de $\left| \sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) \right|_v$ pour $s = 1, \dots, n$. Considérons l'application surjective

$$\begin{aligned} \delta : W_s \otimes R_{s-1}^{n+1} &\longrightarrow R_s \\ (w, h_1, \dots, h_{n+1}) &\longmapsto w + \sum_{j=1}^{n+1} h_j g_j \end{aligned}$$

où W_s est le sous espace de R engendré par les monômes X^u avec $u \in \mathbb{N}^{n+1}$, $u_1 + \dots + u_{n+1} = sd$ et $0 \leq u_k < d$ pour $k = 1, \dots, n+1$. Choisissons comme bases de W_s, R_{s-1}^{n+1} et R_s celles composées de monômes. D'après [4, 3.2.1] $b_s(\xi, \mu, A^{(0)})$ est le déterminant de la sous matrice de rang maximale de la matrice Δ , qui représente δ par rapport aux bases que l'on a choisies. Par conséquent en utilisant les notations de [1, 4.1]

$$\sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) = \sum_{\substack{J \subseteq I_s, \text{card } J = \tau_s \\ J \cup J' = I_s, J \cap J' = \emptyset}} \left(\wedge_{\alpha \in J'} \vec{\chi}_\alpha \right) \wedge \left(\wedge_{\alpha \in J} \vec{\mathcal{Y}}_\alpha \right)$$

où I_s est un ensemble de $M_s = \binom{n+sd}{n}$ éléments, $\vec{\chi}_\alpha$ est un vecteur dont les coefficients sont 0,1 ou $u_i \left(\sum_{k=0}^m C_{u,k} \xi^k \right)$ pour tout $u \in \mathcal{F}$ et $\vec{\mathcal{Y}}_\alpha$ est un vecteur dont les coefficients sont $u_i A_u^{(0)}$ pour tout $u \in \mathcal{F}$. Maintenant en appliquant le Théorème d'Hadamard à ces $\binom{M_s}{\tau_s}$ déterminants, on obtient grâce à [1, (4.2.3) et (4.2.4)]

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in \mathcal{P}_\infty} \log \left| \sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) \right|_v \\ &\leq \log \binom{M_s}{\tau_s} + \frac{M_s}{2} \log \left(\left(\frac{n+d}{d-2} \right) \frac{(n+2d)}{d-1} \right) + (M_s - \tau_s) \left(\log(m+1) + h_\infty(f) \right) \\ &\leq M_s \left[\frac{1}{2} \log \left(\left(\frac{n+d}{d-2} \right) \frac{4(n+2d)}{d-1} \right) + \log(m+1) + h_\infty(f) \right] \end{aligned}$$

et donc grâce à (3.2.2), on trouve la majoration (3.2.1). \square

$$\begin{aligned} \text{p.376, (4.2.1): } \rho(\mathcal{G}(\lambda)) &\leq d^{2n} \binom{n+(n+1)d}{n}^2 \left[(3/2) \log \left(\binom{n+d}{d-2} (4(n+2d)/(d-1)) \right) \right. \\ &+ (3/4) \left(\log(m+1) + h_\infty(f) \right) \left. \right] + \left(\sum_{s=1}^n \binom{n+sd}{n} \right) \binom{n+(n+1)d}{n} \left[\log \left(\binom{n+d}{d-2} (4(n+2d)/(d-1)) \right) \right. \\ &\left. / 2 + \log(m+1) + h_\infty(f) \right]. \end{aligned}$$

REMARQUE 3.3: même après avoir ajouté le terme $e \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log 1/|\sigma_0(\lambda, A^{(0)})|_v$, notre majoration du rayon global de $\mathcal{K}^{(l)}, \rho(\mathcal{G}(\lambda))$, reste toujours indépendante de " l ".

3.4. On termine cette section en donnant la démonstration d'une formule qu'on a utilisée dans [1, p.377, l.10].

LEMME 3.5.

$$\sum_{u \in \mathcal{F}} u_i^2 = \binom{n+d}{d-2} \frac{(n+2d)}{(d-1)}.$$

PREUVE: On observe que

$$(3.5.1) \quad \sum_{u \in \mathcal{F}} u_i^2 = d^2 + (d-1)^2 n + (d-2)^2 \binom{n+1}{2} + \cdots + 1^2 \binom{n+d-2}{n-1}.$$

De plus si $\delta = t \frac{d}{dt}$,

$$\delta^2 \left(\frac{1}{1-t} \right) = \delta^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 t^i = \delta \left(\frac{t}{(1-t)^2} \right) = \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{2t^2}{(1-t)^3}.$$

Par conséquent

$$(3.5.2) \quad \frac{1}{(1-t)^n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^2 t^i \right) = \frac{t}{(1-t)^{n+2}} + \frac{2t^2}{(1-t)^{n+3}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\binom{n+l}{l-1} + 2 \binom{n+l}{l-2} \right] t^l.$$

Au contraire, en faisant directement les calculs

$$(3.5.3) \quad \frac{1}{(1-t)^n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^2 t^i \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{j+i=l} \binom{n-1+j}{j} i^2 \right) t^l.$$

Mais alors grâce à (3.5.2) et (3.5.3) on trouve que pour chaque $l \geq 0$

$$(3.5.4) \quad \binom{n+l}{l-1} + 2 \binom{n+l}{l-2} = \sum_{j+i=l} \binom{n-1+j}{j} i^2$$

et donc d'après (3.5.1) et (3.5.4) on peut finalement conclure que

$$\sum_{u \in \mathcal{F}} u_i^2 = \binom{n+d}{d-1} + 2 \binom{n+d}{d-2} = \binom{n+d}{d-2} \frac{(n+2d)}{(d-1)}.$$

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Bertolin, 'G-fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières', *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997), 353–383.
- [2] B. Dwork, 'On the Zeta function of a hypersurface', *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **12** (1962), 5–68.
- [3] B. Dwork, 'Zeta function of a hypersurface III', *Ann. Math.* **83** (1966), 457–519.
- [4] B. Dwork, *Generalized hypergeometric functions*, Oxford Science Publications (Oxford University Press, New York, 1990).

Institut de Mathématiques, case 247
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu - F-75252
Paris, Cedex 05
France
e-mail: bertolin@riemann.math.jussieu.fr